Page vide laissée intentionnellement

CaMUS 1 (2010), 60–68

Rotation d'un objet rigide

Nicolas Bureau

Résumé. Trouver une équation générale qui puisse représenter exactement la rotation d'une boule en trois dimensions (sur une table de billard, par exemple) n'est pas chose facile. La plupart des représentations virtuelles, tels que les jeux ou les animations, utilisent une approximation simple. En effet, une façon souvent utilisée pour animer la rotation d'une boule est de déterminer son équation de vitesse angulaire par l'intermédiaire de notions de physique mécanique de base. Ensuite, de façon similaire, on détermine l'équation de position angulaire autour de l'axe de rotation et on affiche celle-ci à l'écran en sectionnant le temps en de très petits intervalles. Cette méthode est bonne, mais malheureusement pas exacte, d'où le but de cette recherche.

L'article qui suit fait référence au rapport de recherche nommé *Rotation d'un corps rigide*. La plupart des calculs vous ont été épargnés. La majeure partie de cet article décrit la problématique, introduit la matière et les représentations utilisées, analyse les pistes entreprises et analyse aussi les résultats obtenus.

1. Objectif et motivation

Le but principal de cette recherche est de trouver une équation générale qui puisse représenter exactement la rotation d'une boule en trois dimensions (sur une table de billard, par exemple). La plupart des représentations virtuelles, tels que les jeux ou les animations, utilisent une approximation simple. En effet, une façon souvent utilisée pour animer la rotation d'une boule est de déterminer son équation de vitesse angulaire (représentée par le vecteur tridimensionnel $\vec{\omega}(t)$ au temps t) par l'intermédiaire de notions de physique mécanique de base. Ensuite, de façon similaire, on détermine l'équation de position angulaire autour de l'axe de rotation décrite par $\vec{\omega}(t)$ et on affiche celle-ci à l'écran en sectionnant le temps en de très petits intervalles. Cette méthode est bonne, mais malheureusement pas exacte.Au billard, une boule, une fois frappée, peut avoir trois états : le roulement, le « spin » et le glissement. Le premier type signifie que la rotation de la boule est causée uniquement par le frottement avec le table, ce qui résulte en une vitesse linéaire. Ainsi, on peut déterminer la position angulaire de cet état facilement avec des équations en deux dimensions. Le deuxième type, le « spin », est lorsque la balle tourne autour d'un axe fixe, perpendiculaire à la table, donc celle-ci n'a aucune vitesse linéaire, seulement angulaire. Le glissement est l'état d'une boule juste avant de rouler. Cette dernière, au lieu d'avoir une vitesse angulaire déterminée par la vitesse linéaire (due au frottement), va glisser sur la table, ayant un axe de rotation qui n'est pas fixe. Cet état dure habituellement un très court laps de temps. C'est justement l'équation du glissement qui est souvent approximée lors des animations, c'est pourquoi il serait intéressant d'en développer une qui représenterait exactement le mouvement angulaire de la boule de billard.

Ainsi, ce qui nous intéresse c'est de trouver une représentation simple pour appliquer aux mouvements d'une balle de billard, mais, pour ce faire, il serait plus approprié de commencer par s'intéresser à la forme analytique d'une mouvement de rotation d'un objet rigide. On sait tout d'abord qu'il existe deux types de mouvements : le mouvement spatial et celui angulaire. Le premier se calcule avec des équations linéaires, telle que la vitesse linéaire qui, une fois intégrée par rapport au temps, nous donne exactement la position spatiale de l'objet en question. Or, dans une forme analytique, le mouvement angulaire ne se trouve pas de façon aussi simple et c'est ce que l'on cherche à étudier.

2. Notation et introduction à la problématique

Avant de commencer l'exposé, il serait bien de se fixer une notation. Dans la plupart des équations plus bas, chaque terme sera expliqué pour ne pas porter à confusion. Cependant, afin de faciliter la lecture et la compréhension à l'avance, voici quelques conventions utilisées au cours de cet article.Tous les vecteurs (exemple : $\vec{a}$) de ce texte seront marqués d'une flèche et tous les quaternions seront notés en caractère gras. Une simple lettre minuscule (sans autre attribut) représentera un scalaire et une matrice sera habituellement écrite en majuscule. La norme (longueur) d'un vecteur $\vec{a}$ sera notée $\|a\|$. Pour représenter ce vecteur sous sa forme normalisée $\frac{\vec{a}}{\|a\|}$, la notation $\hat{a}$ sera employée. Si ce dernier évolue en fonction du temps, alors il sera noté $\vec{a}(t)$ pour un temps t (idem pour les scalaires). Si ce vecteur est tridimensionnel, cela signifie que $\vec{a}$ pourra être écrit sous la forme $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ ou $[a_x, a_y, a_z]$. Comme $\vec{a}(t)$ évolue dans le temps, on pourra aussi calculer sa dérivée en fonction du temps, notée $\frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \vec{\dot{a}}(t)$. Si nous avons un intervalle de temps ou de valeurs (vectorielles ou scalaires), on utilisera respectivement les notations Δt ou $\Delta\vec{a}$. Lorsque $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs de même dimension, alors on notera le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ou tout simplement $\vec{a}\vec{b}$. Si s et r sont des scalaires, alors leur multiplication utilisera la même notation. Il s'agit encore une fois de la même notation pour la multiplication d'un scalaire avec un vecteur. Si on veut effectuer une multiplication vectorielle, on utilisera

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur très utilisé sera $\vec{\omega}(t) = [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]$ qui représentera la vitesse angulaire instantanée $\|\omega(t)\|$ de l'objet rigide autour de l'axe de rotation unitaire $\hat{\omega}(t)$. Entre autre, nous nous intéresserons plus particulièrement à une vitesse angulaire de forme affine : $\vec{\omega}(t) = [a_1 + b_1 \cdot t, a_2 + b_2 \cdot t, a_3 + b_3 \cdot t] = \vec{a} + \vec{b}t$. Un autre vecteur sera $\vec{\theta}(t) = \|\theta(t)\| \cdot \hat{n}(t)$ où $\hat{n}(t)$ est l'axe unitaire autour duquel on retrouve un angle de $\|\theta(t)\|$. La plupart du temps, cet axe, qui dépend du temps t, ne sera pas en relation directe avec l'axe du rotation de la vitesse angulaire instantanée, donc, de façon générale, $\dot{\vec{\theta}}(t) \neq \vec{\omega}(t)$, cependant, au cours de cet exposé, nous devrons développer des simplifications afin de mieux généraliser certaines équations. Afin de trouver la forme analytique de $\vec{\theta}(t)$, il faudra tenter de lui trouver plusieurs représentations pour ensuite tenter de trouver un lien entre le connu $\vec{\omega}(t)$ de l'inconnu $\vec{\theta}(t)$.

3. Représentation des rotations

Avant toute chose, il faut savoir que la rotation tridimensionnelle se comporte très différemment de celle bidimensionnelle. En effet, en 2D, la relation entre la vitesse angulaire et la position angulaire est simple : $\int_0^t \vec{\omega}(\tau) d\tau = \vec{\theta}(t)$. Cette dernière équation est due au fait que les angles peuvent se composer (s'additionner) et commuter. Or, en 3D, cette équation reste vraie tant et aussi longtemps que la composition angulaire commute. Malheureusement, en général, elle ne commute pas, c'est pourquoi il serait intéressant de trouver la relation entre la vitesse et la position. De plus, en deux dimensions, la direction de l'axe de rotation est unique et toute composition d'angles peut se résumer en un angle résultant autour de cet axe, tandis qu'en trois dimensions, il existe une infinité de ces directions et toute composition d'angles peut s'exprimer à l'aide de trois angles. Celles-ci sont souvent généralisées par trois axes de rotations perpendiculaires et tout dépendant de l'ordre dans laquelle on applique ces trois angles, la rotation résultante sera différente. C'est la non-commutativité.

Il existe trois outils répandus pour représenter les rotations en trois dimensions, compte-tenu de la non-commutativité : les angles d'Euler, les matrices de rotation et les quaternions.

3.1. Angles d'Euler

C'est peut-être de la méthode la plus visuelle pour représenter une rotation : le « pitch », le « roll » et le « yaw », trois angles représentant chacun l'un des axes principaux. Comme la non-commutativité intervient en trois dimensions, l'ordre dans lequel chacun de ces trois angles est appliqué est très important, car le deuxième angle sera dépendant du premier et le troisième sera dépendant des deux premiers. Cette représentation est souvent évitée pour sa complexité et ses lacunes. En effet, une rotation peut être représentation par maintes combinaisons, ce qui peut engendrer certains problèmes. Pour manipuler ces angles, on doit principalement les transformer en matrices de rotations et multiplier ces matrices, puis reconvertir en angles.

3.2. Matrices de rotations

Contrairement aux angles d'Euler, les matrices de rotations ne nécessitent qu'un seul angle de rotation autour d'un axe représenté par un vecteur à trois dimensions.

Si l'on connaît notre axe de rotation (par exemple $\hat{u} = [u_x, u_y, u_z]$) et si l'on veut faire une rotation de θ autour de ce dernier, alors la matrice suivante sera utilisée :

$$R =$$
$$\begin{bmatrix} u_x^2 + (1-u_x^2)\cos\theta & u_x u_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_x u_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_x u_y(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & u_y^2 + (1-u_y^2)\cos\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_x u_z(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_y u_z(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & u_z^2 + (1-u_z^2)\cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= \hat{u}\hat{u}^T + (I - \hat{u}\hat{u}^T)\cos\theta + \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \sin\theta$$

Cette dernière matrice est aussi nommée la matrice des cosinus directionnels (*direction cosine matrix* en anglais) par plusieurs auteurs. En réalité, chacune des colonnes indique la direction dans laquelle chaque point a été transformé par rapport à tous les axes de rotation.

Pour composer plusieurs rotations, il suffit de multiplier les matrices les représentant. Ainsi, si on veut composer plusieurs rotations, représentées par les matrices R_a, R_b et R_c, sur un même vecteur $\vec{v}$, il suffit de multiplier toutes les matrices de rotation : $R_c \cdot R_b \cdot R_a = R_r$, où R_r est la matrice de rotation résultante telle que

$$\vec{v'} = R_r \cdot \vec{v} \tag{1}$$

Attention, l'ordre de multiplication est important, car, en effet, ni la composition des angles, ni la multiplication des matrices n'est commutative.

Remarquons qu'une rotation nulle est logiquement représentée par la matrice identité I et que peu importe la matrice de rotation R que l'on utilise, cette dernière sera toujours orthogonale, c'est-à-dire que $R \cdot R^t = I$.

3.3. Quaternions

Un quaternion est un élément à quatre composantes (quatre dimensions), mais qui représente des transformations en trois dimensions. La structure et l'algèbre des quaternions sont très similaires à la structure et l'algèbre des nombres complexes, c'est pourquoi on donne le nom de nombre hypercomplexe à ses représentants unitaires.

Définition 1. *Soit* $\mathbf{q}$ *un quaternion. Ce quaternion s'écrit sous la forme suivante*

$$\mathbf{q} = q_0 + q_x \cdot \vec{i} + q_y \cdot \vec{j} + q_z \cdot \vec{k} \tag{2}$$

où q_0*,* q_x*,* q_y *et* q_z *sont des scalaires et tel que les identités suivantes sont respectées :*

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = -1$$
$$\vec{i}\vec{j} = \vec{k}$$

$$j\vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{ki} = \vec{j}$$

On peut aussi écrire

$$\mathbf{q} = [q_0, \vec{v}] \tag{3}$$

où

$$\vec{v} = q_x \cdot \vec{i} + q_y \cdot \vec{j} + q_z \cdot \vec{k} \tag{4}$$

Le vecteur $\vec{v}$ est aussi nommé la partie vectorielle de $\mathbf{q}$, tandis que q_0 est nommé la partie scalaire de ce dernier.

Voici un résumé des opérations fréquemment utilisées dans la manipulation des quaternions :

Opération	Équation	Commutatif ?
Addition	$\mathbf{q}+\mathbf{p} = (q_0+p_0)+(q_x+p_x)\cdot\vec{i}+ (q_y+p_y)\cdot\vec{j}+(q_z+p_z)\cdot\vec{k}$	Oui
Soustraction	$\mathbf{q}-\mathbf{p} = (q_0-p_0)+(q_x-p_x)\cdot\vec{i}+ (q_y-p_y)\cdot\vec{j}+(q_z-p_z)\cdot\vec{k}$	Oui
Multiplication Quaternion Scalaire	$\mathbf{q}\cdot s = [q_0\cdot s, \vec{v}\cdot s]$	Oui
Multiplication Quaternion vecteur	$\mathbf{q}\cdot\vec{h} = [-\vec{v}\cdot\vec{h}, \vec{v}\cdot q_0 + \vec{v}\times\vec{h}]$	Non
Multiplication Interquaternion	$\mathbf{q}\times\mathbf{p} = [q_0\cdot p_0 - \vec{v_q}\cdot\vec{v_p}, q_0\cdot\vec{v_p}+p_0\cdot\vec{v_q}+\vec{v_q}\times\vec{v_p}]$	Non
Conjugué	$\mathbf{q}^* = [q_0, -\vec{v}] = q_0 - q_x\cdot\vec{i} - q_y\cdot\vec{j} - q_z\cdot\vec{k}$	–
Norme	$\Vert\mathbf{q}\Vert = \sqrt{q_0^2+q_x^2+q_y^2+q_z^2}$	–
Inverse	$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\Vert\mathbf{q}\Vert^2}$	–

Tout comme les matrices de rotations, pour représenter une rotation à l'aide d'un quaternion, on doit avoir un vecteur tridimensionnel qui donne la direction de l'axe de rotation et on doit avoir un angle autour de cet axe. L'avantage, en comparaison avec les matrices, c'est qu'un quaternion ne contient que quatre composantes tandis que la matrice en nécessite neuf. Voici l'allure d'un quaternion servant à représenter une rotation de $\Vert\theta(t)\Vert$ autour d'un axe normalisé $\hat{u}(t)$:

$$\mathbf{q} = [q_0 = \cos\left(\frac{\Vert\theta(t)\Vert}{2}\right), v = \sin\left(\frac{\Vert\theta(t)\Vert}{2}\right)\cdot\hat{u}(t)] \tag{5}$$

Attention, tout quaternion de rotation se doit d'être unitaire. S'il ne l'est pas, il suffit de le normaliser en le divisant par sa norme. Ceci nous amène à en conclure que l'inverse d'un quaternion unitaire est en fait son propre conjugué.

De même qu'avec les matrices de rotation, on peut trouver un vecteur $\vec{h'}$, obtenu par la rotation (représentée par $\mathbf{q}$) de $\vec{h}$ avec la formule suivante

$$\vec{h'} = \mathbf{q} \cdot \vec{h} \cdot \mathbf{q}^* \tag{6}$$

Si on veut effecteur plusieurs rotation $\mathbf{q_a}$, $\mathbf{q_b}$ et $\mathbf{q_c}$ sur un même vecteur $\vec{h}$, il suffit de multiplier tous les quaternions de rotation :

$$\mathbf{q_c} \cdot \mathbf{q_b} \cdot \mathbf{q_a} = \mathbf{q_r} \tag{7}$$

où $\mathbf{q_r}$ est le quaternion de rotation résultant telle que

$$\vec{h'} = \mathbf{q_r} \cdot \vec{h} \cdot \mathbf{q_r}^* \tag{8}$$

Attention, comme déjà mentionné plus haut, l'ordre de la composition (multiplication) des quaternions de rotation est importante, car ni la composition d'angles et ni la multiplication de quaternions n'est commutative.

4. Dérivée des rotations 3D

Afin d'introduire l'aspect des vitesses angulaires, il faut tout d'abord s'intéresser à la dérivée de chacune des représentations par rapport au temps. Voici donc, de façon résumée, les dérivées des trois représentations de rotations introduites précédemment.

4.1. Angles d'Euler

$$\vec{\omega}_x = \dot{\Theta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\psi \cos\Theta \tag{9}$$

$$\vec{\omega}_y = \dot{\Theta} \sin\psi - \dot{\phi} \cos\psi \sin\Theta \tag{10}$$

$$\vec{\omega}_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\Theta \tag{11}$$

4.2. Matrices de rotation

$$\frac{d}{dt} R_r(t) = \Omega(t) \cdot R_r(t) \tag{12}$$

où

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

4.3. Quaternions

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{q}_\omega(t)\mathbf{q}(t) \tag{14}$$

où

$$\mathbf{q}_\omega(t) = [0\,,\,\vec{\omega}(t)] \tag{15}$$

5. Pistes entreprises

Cette section est le cœur de notre recherche. Elle sert à trouver un lien entre la vitesse angulaire instantanée et la position angulaire. Toutes les pistes développées sont longues et exhaustives, alors elles vous seront résumées.

5.1. Pistes 1 et 2 : Mouvement gyroscopique

L'idée des deux premières pistes a été inspirée par Davailus [**1**], Farrell et Barth [**2**] : celle d'utiliser la forme exponentielle intégrale d'un quaternion :

$$\mathbf{q}(t_1) = e^{\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\mathbf{q}_\omega(t)dt} \cdot \mathbf{q}(t_0) \tag{16}$$

Cependant, cette formule n'est valide que si l'axe de rotation est fixe, or notre axe change de direction en fonction du temps. D'où l'idée de Farrell et Barth qui est de changer presque instantanément le système d'axes de telle sorte que notre axe de rotation semble rester fixe et ainsi, cette formule deviendrait valable. Malheureusement, nous voulons une forme analytique et non approximative, tel que proposé par ces auteurs. C'est pourquoi, pour chaque itération de temps, il faudrait reconvertir les coordonnées de notre nouveau système d'axe dans un système global et cela alourdirait les calculs et cela ne fonctionnerait que pour de très petits intervalles. C'est la raison principale pour laquelle ces deux pistes ont été mises de côté.

5.2. Piste 3 : Angles d'Euler

Cette troisième piste a un but simple, celui d'isoler les dérivées des angles d'Euler et de résoudre le système d'équations obtenu :

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \omega_x(t) + \omega_y(t)\cdot\sin\psi(t)\cdot tan\Theta(t) + \omega_z(t)\cdot\cos\psi(t)\cdot tan\Theta(t) \\
\dot{\Theta} &= \omega_y(t)\cdot\cos\psi(t) - \omega_z(t)\cdot\sin\psi(t) \\
\dot{\phi} &= \omega_y(t)\cdot\tfrac{\sin\psi(t)}{\cos\Theta(t)} + \omega_z(t)\cdot\tfrac{\cos\psi(t)}{\cos\Theta(t)}
\end{aligned} \tag{17}$$

Malheureusement, résoudre ce système d'équations différentielles semble une tâche plutôt ardue et non intuitive, même numériquement.

5.3. Pistes 4, 5 et 6 : Interpolation et cas simples

Ces pistes ont été créées pour nous-mêmes. Leur but premier est de nous aider à développer notre intuition en commençant par étudier les cas simples du phénomène, puis de les compliquer peu à peu.

Premièrement, nous avons supposé que l'axe de rotation décrit un mouvement d'interpolation autour d'une sphère unitaire et nous avons obtenu :

$$\mathbf{q}_\omega(t) = \|\dot{\theta}(t)\| \cdot \mathbf{p}(t) + \sin\|\theta(t)\| \cdot \dot{\mathbf{p}}(t) + [1 - \cos\|\theta(t)\|] \cdot \hat{e}_3 \tag{18}$$

où $\hat{e}_3 = [0,0,1]$ et où $\mathbf{p}(t)$ est le quaternion d'interpolation décrit par :

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{\phi}{\tau \cdot \sin\phi}\left[0, \cos(\phi\frac{t}{\tau})\cos(\frac{\phi}{2}) - \cos(\phi - \phi\frac{t}{\tau}), -\cos(\phi\frac{t}{\tau})\sin(\frac{t}{\tau}), 0\right] \tag{19}$$

où τ est le temps total et où ϕ est l'angle entre la position initiale et finale de l'axe de rotation.

Nous n'avons pas réussi à trouver une forme convenable pour la position angulaire en supposant que la vitesse angulaire était affine.

Après ces calculs, nous avons étudié les cas simples quand l'axe de rotation est constant et quand la vitesse angulaire a une direction fixe, mais avec une norme affine et nous avons obtenu ce résultat :

$$\vec{\omega}(t) = \|\dot{\theta}(t)\| \cdot \hat{\omega}(t) + \sin\|\theta(t)\| \cdot \dot{\vec{\omega}}(t) + [1 - \cos\|\theta(t)\|] \cdot \vec{\omega}(t) \times \dot{\vec{\omega}}(t) \tag{20}$$

Malheureusement, toutes ces pistes ont pour hypothèse que l'axe de rotation reste immobile, ce qui cause problème, d'où le développement de la piste suivante.

5.4. Piste 7 : Axe de rotation déterminé par l'inconnu

Comme l'indique le titre de la piste, nous avons décidé de nous attaquer au cas où l'axe de rotation n'est pas fixe, c'est-à-dire que $\hat{u} = \frac{\vec{\theta}}{\|\theta\|} \neq \frac{\vec{\omega}}{\|\omega\|}$ comme le suggèrent [**3**, **4**]. Après de longs calculs, nous avons obtenu :

$$\dot{\vec{\theta}}(t) = \vec{\omega}(t) - \frac{1}{2}(\vec{\theta}(t) \times \vec{\omega}(t)) + \frac{1}{\|\theta(t)\|^2}\left(1 - \frac{\|\theta(t)\|}{2}\cot\frac{\|\theta(t)\|}{2}\right)\vec{\theta}(t) \times (\vec{\theta}(t) \times \vec{\omega}(t)) \tag{21}$$

Cette équation est en fait un système de trois équations différentielles, qui, après plusieurs essais numériques, ne semble pas se résoudre si facilement.

6. Conclusion

Ces pistes n'ont peut-être pas été fructueuses en terme de résultats escomptés, mais elles nous ont fourni de nombreuses intuitions plus utiles les unes que les autres afin d'éventuellement retravailler sur ce dossier avec un bagage expérimental plus fourni.

Références

[1] George P. Davailus. *The application of quaternion algebra to gyroscopic motion, navigation and guidance*, 2005.

[2] Jay Farrell and Matthew Barth. *The global positioning system and inertial navigation.* McGraw Hill, 1999.

[3] John E. Bortz. *A new mathematical formulation for strapdown intertial navgation*, 1971.

[4] Malcolm D. Shuster. *The kinematic equation for the rotation vector*, 1993.

NICOLAS BUREAU, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Courriel: nicolas.bureau@usherbrooke.ca